Πρόχειρες Σημειώσεις-Μαθηματικά για Οικονομολόγους

Πρώτο Μέρος – Βασικές Έννοιες Συνολοθεωρίας

Α. Σύνολα

Ξεκινάμε με σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες της συνολοθεωρίας (Set Theory). Σκοπός μας είναι η διατύπωση και χρήση της έννοιας του πληθαρίθμου και του αξιώματος της επιλογής τα οποία και θα χρησιμοποιήσουμε αργότερα. Προφανώς οποιαδήποτε λεπτομερής σκιαγράφηση κάποιας αξιωματικής θεμελίωσης της παρουσίασης, βρίσκεται εκτός των των συγκεκριμένων σημειώσεων και παραλείπεται. Παρόλα αυτά στα παρακάτω γίνονται κάποιες αναφορές σε ένα από τα ευρέως διαδεδομένα, αυτό των Zermelo – Fraenkel (ZF).

Η ανακάλυψη και χρήση της Θεωρίας γίνεται από τον Cantor στα τέλη του 19ου αιώνα ο οποίος χρησιμοποιεί τα σύνολα προκειμένου να διατυπώσει την υπερπεπερασμένη αριθμητική, δηλ. την αριθμητική των άπειρων αριθμών. Χρησιμοποιεί για διαισθητική περιγραφή της έννοιας του συνόλου:

"Σύνολο είναι οποιαδήποτε πολλαπλότητα μπορεί να γίνει αντιληπτή ως ενότητα"

Το παραπάνω είναι δυνατόν να διατυπωθεί αξιωματικά ως εξής:

Αν P είναι μια οριστική συνθήκη (δηλ. μια συνθήκη πιο ακριβώς μια ιδιότητα, χωρίς κατ' ανάγκη αυτή να είναι αποφασίσιμη, δηλ. να μπορούμε να αποφανθούμε για την αλήθεια αυτής· με πεπερασμένο τρόπο τότε:

Αξίωμα της Συμπερίληψης:

Αν P όπως προηγουμένως τότε υπάρχει σύνολο που αποτελείται από όλα τα αικανοποιούν την P.

π.χ. Έστω $P(x)=$ το x άρτιος

οπότε $X=\{$άρτιοι φυσικοί$\}$

Στις αρχές του $20^{ου}$ αιώνα ο Russell παρατηρεί ότι η οριστική συνθήκη $P(x)= x\notin x$ στο x οδηγεί σε άτοπο αφού βάσει του παραπάνω υπάρχει σύνολο R με

$$R=\{x : x\notin x\}$$

αλλά τότε
$$R\in R \Rightarrow R\notin R$$
$$R\notin R \Rightarrow R\in R \text{ άτοπο.}$$

Η παραπάνω αξιωματική θεμελίωση καταρρέει οπότε αναγκάστηκαν αναθεωρήσεις αυτής που να αποφεύγει τουλάχιστον το παραπάνω παράδοξο. Ανάμεσα σε διάφορες άλλες για τέτοια είναι η ZF η οποία καταρχάς υποθέτει ότι υπάρχει ένα σύμπαν αναφερόμενων (Universe of discourse) κάποια εκ των οποίων είναι σύνολα, όπως και οριστικές συνθήκες, τελεστές κ.ο.κ. ένα "μέρος" του οποίου περιγράφεται από τα χρησιμοποιούμενα αξιώματα. Δεν θα αναφερθούμε με λεπτομέρεια σε αυτά, αρκεί μόνο να αναφέρουμε ότι καταρχάς αντικαθίσταται η αρχή της συμπερίληψης από την παρακάτω "περιορισμένη" εκδοχή αυτής:

"Αρχή του διαχωρισμού"

$\forall$ σύνολο A και οριστική συνθήκη P $\exists$ σύνολο B

ώστε $x\in B \Longleftrightarrow x\in A$ <u>ΚΑΙ</u> $P(x)$ αληθές.

Το παραπάνω έπεται ότι το R του παραδόξου του Russel δεν είναι σύνολο παρόλο που δεν απαγορεύεται να βρίσκεται στο σύμπαν αναφοράς, αφού και πάλι αν $P(x)=$ $x\notin x$ τότε το $r(A)=\{x\in A \text{ ΚΑΙ } x\notin x\}\notin A$ αφού αυτό τότε σε αντίθεση περίπτωση θα είχαμε $r(A)\in r(A)$ και $r(A)\notin r(A)$. Αυτό με την σειρά του συνεπάγεται ότι το R δεν είναι δυνατόν να είναι μέλος κάποιου συνόλου. Αφού όμως $R\in R$ τότε το R δεν μπορεί να είναι σύνολο. Έπεται ότι η συλλογή όλων των συνόλων, δεν είναι δυνατόν να είναι σύνολο, όπως και οποιαδήποτε συλλογή έχει την παραπάνω ιδιότητα. Συνεπώς αυτές οι συλλογές δεν είναι δυνατόν να μελετηθούν από την ZF.

π.χ. Η συλλογή των μετρικών χώρων δεν είναι δυνατόν να είναι σύνολο, αφού αν ήταν θα μπορούσε να γίνει μετρικός χώρος, π.χ. εφοδιασμένη με την διακριτή μετρική, οπότε και θα ανήκε στην R. Ανάλογα ισχύουν για τις συλλογές των τοπολογικών χώρων, των διατεταγμένων χώρων κ.ο.κ. Η μελέτη αυτών γίνεται από την θεωρία κατηγοριών (Category Theory).

Παρατηρούμε ότι η "γνώση" την ZF βασίζεται στην πρότερη ύπαρξη συνόλων και την ιδιότητα του $\in$ που προσδιορίζεται από την ύπαρξη του A και την αληθοτιμή της P. Η θεωρία συνεχίζει με την υιοθέτηση περαιτέρω αξιωμάτων τα οποία επιτρέπουν την κατασκευή συνόλων από άλλα μέσω πράξεων, την ύπαρξη "ιδιαιτέρων" συνόλων κ.ο.κ. Χωρίς εξαντλητική περιγραφή ενδεικτικά αναφέρουμε τα παρακάτω:

α. Δύο σύνολα είναι ίσα αν και μόνο αν έχουν τα ίδια στοιχεία, δηλ.

$A=B \iff \forall x: x\in A \iff x\in B$ (έκταση)

β. $A\subseteq B \iff \forall x: x\in A \Rightarrow x\in B$ (υποσύνολο)

έπεται ότι $A=B \iff A\subseteq B$ και $B\subseteq A$

γ. $\exists\ \phi=\{x: x\neq x\}$ (κενό)

α., γ. $\Rightarrow$ το ϕ είναι μοναδικό, αφού αν $\phi'=\{x: x\neq x\} \Rightarrow \phi=\phi'$

δ. $\forall$ σύνολο A, $\exists!$ σύνολο 2^A με $B\in 2^A \iff B\subseteq A$ (δυναμοσύνολο)

β, γ, δ $\Rightarrow \phi, A\in 2^A$ αφού αν $x\in\phi \Rightarrow x\in A$, $x\in A\Rightarrow x\in A$.

π.χ. $2^{\phi}=\{\phi\}$

ε. Αν $\mathcal{A}$ σύνολο τότε $\bigcup\mathcal{A}=\{x: \exists A\in\mathcal{A}, x\in A\}$ (ένωση) στ. $\bigcap \mathcal{A} = \{x : x\in A, \forall A \in \mathcal{A}\}$ (τομή)

Παρατηρούμε ότι η 2F επιτρέπει την ένωση και τομή για αυθαίρετες συλλογές (σύνολα) συνόλων.

Π.χ. $A\cup\emptyset = A$, $A\cap\emptyset=\emptyset$

ζ. $A/B = \{x\in A, x\notin B\}$ (διαφορά)

Π.χ. αν $A\subseteq B \Rightarrow A/B=\emptyset$

αν $A\cap B=\emptyset \Rightarrow A/B = A$

Από τις ε, στ, ζ προκύπτουν οι σχέσεις De Morgan, οι απλές

εκδοχές των οποίων είναι οι :

$$X/(A\cup B) = (X/A)\cap(X/B)$$

αφού

$$X/_{A\cup B} = \{x\in X, x\notin A\cup B\}$$
$$= \{x\in X, x\neq y, \forall y\in A \text{ ή } y\in B\}$$
$$= \{x\in X, x\notin A, x\notin B\}$$
$$= \{x\in X, x\notin A\}\cap\{x\in X, x\notin B\}$$

$$X/_{A\cap B} = (X/A)\cup(X/B)$$

να

Προσπαθήστε να δείξετε ότι οι $\cup$, $\cap$ μετατίθενται και προσεταιρίζονται, δηλ. $A*B=B*A$, $A*B*\Gamma = (A*B)*\Gamma = A*(B*\Gamma)$ για $* = \cup$ ή $\cap$. Επίσης μεταξύ τους επιμερίζονται, δηλ. $A\cup(B\cap\Gamma) = (A\cup B)\cap(A\cup\Gamma)$ και αντίστοιχα.

η. Υπάρχει το σύνολο $I = \{\phi, \{\phi\}, \{\{\phi\}\}, \{\{\{\phi\}\}\}, \dots\}$ (αξίωμα απείρου)

Σημ. Το παραπάνω επιτρέπει την ύπαρξη απείρων αριθμών.

Ο. Αν α, β σύνολα το διατεταγμένο ζεύγος

$$(\alpha,\beta) := \{\{\alpha\}, \{\alpha,\beta\}\}$$

και $A \times B = \{(\alpha,\beta), \alpha \in A, \beta \in B\}$ (καρτεσιανό γινόμενο)

Σημείωση: Η δυνατότητα σχηματισμού $A \times B$ δημιουργεί το ερώτημα για το αν ορίζεται το $\times A$. Όταν η A έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων (π.χ. $A = \{A, B, \Gamma\}$, $A \times B \times \Gamma \overset{?}{=} (A\times B)\times\Gamma \overset{?}{=} A \times (B \times \Gamma)$) απαιτεί την έννοια της συνάρτησης. Αν έχει άπειρο, απαιτεί και την έννοια του αξιώματος της επιλογής.

π.χ. $A \times \phi \overset{\text{O}}{=} \{(x,y), x \in A, y \in \phi\}$

$$= \{\{\{x\}, \{x,y\}\}, x \in A, y \in \phi\}$$

$$= \{\{\{x\}, \{x,y\}\}, x \in A, y \neq y\}$$

$$\overset{\alpha}{=} \{\{\{x\}, \{x,y\}\}, x \in A, \{x,y\} \neq \{x,y\}\}$$

$\overset{\alpha}{=} \{\{\{x\},\{x,y\}\},\{\{x\},\{x,y\}\} \neq \{\{x\},\{x,y\}\}\}$

$= \emptyset$ εξαιτίας της μοναδικότητας.

Αναλόγως $\phi \times A = \phi$, ενώ από τον ορισμό είναι προφανές ότι $A \times B \neq B \times A$ γενικά.

ΝΔ $A \times (B * C) = (A \times B) * (A \times C)$ όπου $* = \cup, \cap$ (Επιμεριστικότητα του $\times$)

B. Συναρτήσεις

Η έννοια της συνάρτησης μεταξύ δύο συνόλων αποδίδει την δυνατότητα "μετασχηματισμού" οποιουδήποτε στοιχείου του πρώτου, σε μοναδικό μέλος του δεύτερου. Η συνολοθεωρητική ευδοχή της έννοιας "ξεχνά" την παραπάνω δυναμική, και αποδίδει την συνάρτηση ως ένα παγιωμένο σύνολο.

Θυμόμαστε ότι προκειμένου να οριστεί μια συνάρτηση χρειάζεται ο προσδιορισμός του πεδίου ορισμού (domain), έστω το σύνολο X, του πεδίου τιμών, έστω το Y, και του τρόπου με τον οποίο όποιο $x \in X$ μετασχηματίζεται (ή απεικονίζεται) σε μοναδικό $y \in Y$. (Χρησιμοποιούνται οι συμβολισμοί $f: X \to Y$, $X \xrightarrow{f} Y$ κ.ο.κ.)

Το τελευταίο ορίζει υποσύνολο του $X \times Y$ το οποίο είναι

$$Gr(f) = \{(x,y) : x \in X, y = f(x) \in Y\}$$

που ονομάζεται γράφημα της f. Ο συνολοθεωρητικός ορισμός της f χρησιμοποιεί απλώς τα τρία παραπάνω σύνολα, ως ένα νέο σύνολο που αποτελεί η διατεταγμένη τριάδα των παραπάνω:

$$f = (X, Y, Gr(f))$$

Στα παρακάτω θα χρησιμοποιούμε τους συνήθεις συμβολισμούς χωρίς να επιμένουμε ιδιαίτερα στον παραπάνω ορισμό. Σημειώνουμε ότι είναι δυνατόν να γενικευθεί ο παραπάνω ορισμός επιτρέποντας την υπαρξη $x \in X : (x,y) \notin Gr(f)\ \forall y \in Y$. Τέτοιου είδους συναρτήσεις ονομάζονται μερικές (partial).

Ένα παράδειγμα είναι η $\{\mathbb{R}, \mathbb{R}, \{(x, \frac{1}{x}), x\in\mathbb{R}\}\}$.

Παραδείγματα συναρτήσεων που θα επικοινωνούμε συχνά στα παρακάτω:

α. $X=Y$, $f(x)=x$ οπότε $Gr(f)=\{(x,x), x\in X\}=\Delta_X$ (δείτε παραπάνω). Η f ονομάζεται ταυτοτική και συμβολίζεται με id_X.
β. $\emptyset\neq X\subset Y$, $f(x)=x$. Προσοχή η $f\neq id_X$ αφού βάσει του ορισμού $f=(X,Y,\{(x,x),x\in X\})$ ενώ η $id_X=(X,X,\{(x,x)\})$ και $Y\neq X$. Η f αντιστοιχίζει το $x\in X$ στον εαυτό του ως στοιχείο του υπερσυνόλου Y και ονομάζεται συμπερίληψη (inclusion) ενώ θα συμβολίζεται με i_X.
γ. Έστω $X=A\times B$, $Y=A$ ή B. Οι $P_1((x,y))=x$, $P_2((x,y))=y$ ονομάζονται προβολές. Η έννοια είναι επεκτάσιμη σε αυθαίρετο πλήθος παραγόντων όπως θα δούμε παρακάτω.

Για τα επόμενα παραδείγματα μας χρειάζονται οι παρακάτω παρατηρήσεις.

Π1. Είναι δυνατόν να αποδειχθεί στην ZF ότι το $\{f: X\to Y\}$ είναι σύνολο εφόσον είναι τα X και Y. Το σύνολο των συναρτήσεων από το X στο Y συμβολίζεται με Y^X. (προσπαθήστε να εξηγήσετε τον συμβολισμό από όσα πούμε παρακάτω για το αξίωμα της επιλογής) Όταν $Y=\mathbb{R}$ η f ονομάζεται πραγματική.
Π2. Συνολοθεωρητική κατασκευή του $\mathbb{N}$. Σκεφθείτε την παρακάτω αντιστοίχιση.

$$
\begin{aligned}
0 &\leftrightarrow \emptyset \\
1 &\leftrightarrow \{\emptyset\} \leftrightarrow \{0\} \\
2 &\leftrightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \leftrightarrow \{0,1\} \\
3 &\leftrightarrow \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \leftrightarrow \{0,1,2\} \\
&\ \vdots \\
n &\leftrightarrow \cdots \leftrightarrow \{0,1,\dots,n-1\}
\end{aligned}
$$

Προφανώς η παραπάνω είναι αμφιμονοσήμαντη (γιατί;) και αποτελεί ένα συνολοθεωρητικό υπόδειγμα για τους φυσικούς αφού μπορούμε να αποδείξουμε ότι το $\mathbb{N}$ είναι σύνολο και $\mathbb{N}=\{0,1,2,\dots\}$.

δ. Αν $A\subseteq X$ τότε η 1_A (δείκτρια - indicator του A) ορίζεται ως $1_A: X\to 2$ με $1_A(x)=\begin{cases}0 & x\notin A\\ 1 & x\in A\end{cases}$. Προφανώς αν

$1_\emptyset=0\ \forall x$, και $1_X=1\ \forall x\in X$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει αμφιμονοσήμαντη σχέση μεταξύ του δυναμοσυνόλου του X και του $2^X=\{f:X\to 2\}$ αφού το τελευταίο μπορεί να αποτελείται μόνο από δείκτριες υποσυνόλων του X (από την αρχή της συμπερίληψης που κάθε δείκτρια "ορίζει"* μονοσήμαντα το ανάλογο υποσύνολο. Από αυτό προκύπτει και ο συμβολισμός του δυναμοσυνόλου.

ε. Με τι θα μοιάζει μια συνάρτηση από το $2\to X$; Προφανώς μια τέτοια συνάρτηση θα έχει ως γράφημα το $\{(0,x_1),(1,x_2)\}$ όπου $x_1,x_2\in X$ δηλ. θα απεικονίζει την $(0,1)$ στο διατεταγμένο ζεύγος $(x_1,x_2)\in X\times X$. Προφανώς κάθε στοιχείο του $X\times X$ ορίζει μοναδική τέτοια συνάρτηση και αντίστροφα. Επομένως το $X\times X$ ταυτίζεται συνολοθεωρητικά με το $\{f:2\to X\}=X^2$. Αυτή η παρατήρηση επιτρέπει τον ορισμό του $X^n\ \forall n\in\mathbb{N}$ ως το $\{f:n\to X\}$, καθώς και τον ορισμό του

$X^{\mathbb{N}}=\{f:\mathbb{N}\to X\}$. Το τελευταίο ονομάζεται σύνολο ακολουθιών με τιμές στο X.

στ. Έστω ότι X υποσύνολο του $\{f:A\to Y\}$. Η συνάρτηση $ev_\alpha: X\to Y$ που ορίζεται ως $ev_\alpha(f)=f(\alpha)$ ονομάζεται συνάρτηση υπολογισμού στο $\alpha\in A$. Προφανώς μια τέτοια ορίζεται $\forall\alpha\in A$.

(Κάποιες) Ιδιότητες Συναρτήσεων

Ι. Ενριπτικές (injective). Μια συνάρτηση $f: X\to Y$ θα ονομάζεται

* Στα προηγούμενα ορίσαμε τις συναρτήσεις ως σύνολα. Αυτό μας δημιουργεί την αίσθηση ότι μπορεί να γίνεται και το αντίστροφο.

ένριψη (injection, 1-1) αν όταν $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

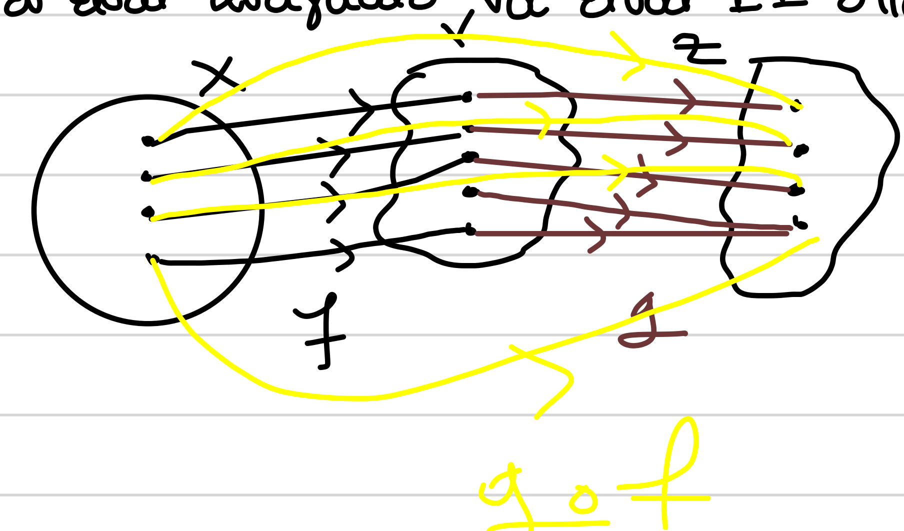
Προφανώς η id_X είναι 1-1. Αναλόγως και η i_X. Η $f(x)=\ln x$ επίσης αφού αν $\ln x_1=\ln x_2 \Leftrightarrow e^{\ln x_1}=e^{\ln x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$ κ.ο.κ. Η $f(x)=x^2$ δεν είναι όταν $X=\mathbb{R}$, αλλά είναι όταν $x=\mathbb{R}^+$ εξαιτίας των ιδιοτήτων του Γ. Οι προβολές και οι ev_α δεν είναι γενικά 1-1.

α. Συμβολίζουμε με $|X|$ το πλήθος των στοιχείων του X. Όταν $f:X\to Y$ 1-1 τότε $|X|\leq|Y|$. (Θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό παρακάτω)

β. Θεωρούμε γνωστή την έννοια της σύνθεσης συναρτήσεων.* Έστω $f: X\to Y$, $g: Y\to Z$. Ορίζεται η $g\circ f: X\to Z$. Αν η $g\circ f$ 1-1 τότε και η f 1-1.

Απόδειξη: Έστω ότι η f δεν είναι 1-1. Τότε $\exists x_1,x_2\in X: x_1\neq x_2$ και $f(x_1)=f(x_2)$. Μα τότε $g(f(x_1))=g(f(x_2))$ οπότε ούτε η $g\circ f$ είναι 1-1.

Η g δεν είναι αναγκαίο να είναι 1-1 όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα



* Θυμίζουμε ότι η ∘ είναι προσεταιριστική αλλά όχι μεταθετική.

γ. Η f είναι 1-1 $\Leftrightarrow$ $f\circ g=f\circ w \Rightarrow g=w$ για κάθε ζεύγος κατάλληλων συναρτήσεων g,w (left cancelability)

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Αν η f 1-1, τότε εφόσον $f\circ g(x)=f\circ w(x) \Rightarrow g(x)=w(x)$. ($\Rightarrow$) Έστω ότι ισχύει η ιδιότητα. Αν $f(x_1)=f(x_2)$ ορίζουμε $g,w: 1\to X$, $g(0)=x_1$, $w(0)=x_2$. Μα τότε $g(0)=w(0) \Rightarrow x_1=x_2$.

δ. Η f είναι 1-1 $\Leftrightarrow \exists\, g : g\circ f = id_X$ $(g: Y\to X)$
Η g ονομάζεται αριστερή αντίστροφη της f (left inverse) ή ανάσυρση της f (retraction).

Απόδειξη: ($\Leftarrow$) Αν η f είναι 1-1 τότε ορίζουμε την g ως εξής: Θεωρούμε το $im(f)=\{y\in Y: \exists x\in X$ και $y=f(x)\}$ και τότε αν $y\in im(f)$ ορίζουμε

$Gr(g) = \{(y,x),\ y \in im(f),\ x \in X$ και x το μοναδικό για το οποίο $y = f(x)\}$ που είναι μη κενό επειδή η f είναι 1-1.* Παρατηρούμε ότι $g(f(x)) = x$.

($\Leftarrow$) Αν η f έχει ανάκληση τότε αν $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow x_1 = x_2$. (η ανάκληση είναι μοναδική;)

Π.χ. Αν $f = \iota_A$ τότε $g: Y \to A$ με $g(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ y, & x \notin A \end{cases}$ όπου $y \in A$ είναι ανάκληση.

(* Στο $Y / im(f)$ η g μπορεί να οριστεί αυθαίρετα).

II. Επιρριπτικές (surjective).

Μια συνάρτηση $f: X \to Y$ ονομάζεται επίρριψη (surjection) ανν $\forall y \in Y, \exists x \in X : y = f(x)$, δηλαδή ανν $im f = Y$.

Η id_X είναι επίρριψη. Η $\ln(x)$ ως πραγματική συνάρτηση δεν είναι (γιατί;). Οι δείκτριες είναι μόνο όταν $A \neq X$ και $A \neq \emptyset$. Η συμπερίληψη είναι ανν $A = X$, ενώ οι προβολές είναι σε κάθε περίπτωση.

Γεγονός: Κάθε συνάρτηση μπορεί να γίνει επίρριψη (επί) αν το Y αντικαταστα-με την εικόνα της f ($im(f)$).

Η έννοια της επίρριψης είναι δυϊκή της έννοιας της ένριψης. Εξ' αιτίας του δυϊσμού οι επιρρίψεις έχουν ιδιότητες που μοιάζουν αντίστροφες των α.-δ. για τις 1-1. Έχουμε λοιπόν τα εξής:

α'. Αν $f: X \to Y$ επί τότε $|X| \geq |Y|$.

β'. Έστω οι g, f όπως στην β. Μόνο αν η g επί τότε η $g \circ f$ είναι επί. Και πάλι η f δεν χρειάζεται να είναι επί.

γ'. Η f είναι επί $\Leftrightarrow$ $g \circ f = w \circ f \Rightarrow g = w$ για κάθε κατάλληλο ζεύγος g, w.

δ'. Η f είναι επί $\Leftrightarrow \exists\, g : f \circ g = id_X$. Η g ονομάζεται τομή της f (section) (η τομή είναι μοναδική;)

→ Προσπαθήστε να αποδείξετε τα α'-δ'.

III. Αμφιρριπτικές (bijectives). Η f θα ονομάζεται αμφίρριψη (bijection) ανν είναι 1-1 και επί.

Βάσει των προηγούμενων κάθε ένριψη μπορεί να γίνει αμφιρίψη αν το Y αντικατασταθεί με το $\operatorname{im} f$. Δεν γνωρίζουμε προς το παρόν κάποια διαδικασία που να μετατρέπει τυχούσα f σε ένριψη. Για αυτό θα χρειαστούμε την έννοια της ισοδυναμίας.

Ο συνδυασμός των α-δ με τις α'-δ' δίνει τα εξής:

α''. Αν η f αμφι τότε $|X|=|Y|$

Παρένθεση: Δομημένο σύνολο ονομάζεται όποιο ζεύγος (X,Δ_X) όπου το X ονομάζεται φορέας και το Δ_X δομή. Η δομή είναι σύνολο που μπορεί να αποτελείται από συναρτήσεις, υποσύνολα του 2^X κ.ο.κ. και εκφράζει περαιτέρω ιδιότητες που θέλουμε να αποδίδονται στο X. Π.χ. αποστάσεις, σ-άλγεβρες, τοπολογίες, διατάξεις κ.ο.κ. Οι συναρτήσεις μεταξύ δομημένων συνόλων με την ίδια δομή που δεν "καταστρέφουν" την δομή ονομάζονται μορφισμοί. Όταν οι μορφισμοί είναι και αμφι τότε ονομάζονται ισομορφισμοί και εφόσον υπάρχουν τέτοιοι τα δύο δομημένα σύνολα (ή απλώς χώροι) ονομάζονται ισομορφικοί, δηλ. ταυτιζόμενοι ως προς την δομή. Ένα μέρος των μαθηματικών αφορά στην ταξινόμηση των ισομορφισμών. Στην συνολοθεωρία $\Delta_X=\{|\cdot|\}$* Επομένως τα X,Y είναι ισομορφικά ως προς την εν λόγω θεωρία αν $|X|=|Y|$, δηλαδή αν υπάρχει μεταξύ τους αμφιρίψη. Από εδώ προκύπτουν οι ταυτίσεις προηγούμενων παραγράφων. (π.χ. η ταύτιση του δυναμοσυνόλου με το σύνολο συναρτήσεων 2^X). Το α'' ονομάζεται Θεώρημα των Shröeder-Bernstein και θα το αποδείξουμε αργότερα.

γ''. η f αμφι αν $f\circ g=f\circ\omega \Rightarrow g=\omega$ και $g'\circ f=\omega'\circ f\Rightarrow g'=\omega'$ για όποια κατάλληλα ζεύγη (g,ω) και (g',ω').

δ''. η f αμφι αν $\exists g: Y\to X$: $g\circ f=\mathrm{id}_X$ και $f\circ g=\mathrm{id}_Y$. Η g συμβολίζεται με f^{-1} και ονομάζεται αντίστροφος της f. Είναι μοναδική αφού αν g' επίσης αντίστροφη έχουμε ότι $\mathrm{id}_X=f^{-1}\circ f=g'\circ f \overset{\gamma''}{\Rightarrow} f^{-1}=g'$.

β''. Αν η $g\circ f$ είναι αμφι τότε η f είναι 1-1 και η g επί.

IV. Σχετιζόμενες Συναρτήσεις

Έστω $f:X\to Y$. Αυτή διαμορφώνει απεικονίσεις μεταξύ των $2^X, 2^Y$. Αυτές είναι

* Επομένως εδώ μορφισμός είναι κάθε συνάρτηση.

οι παραπάνω: (δεν αλλάζουμε συμβολισμούς χάριν οικονομίας)

α. $f: 2^X \to 2^Y$ που ορίζεται ως

αν $A\in 2^X$, $f(A)=\{y\in Y: \exists x\in X: y=f(x)\}$

Προφανώς $im(f)=f(X)$, ενώ $f(\{x\})=\{f(x)\}$. Αν η f είναι επί τότε και η παραπάνω είναι επί αφού αν $B\in 2^Y$ και $B\neq\emptyset$ τότε $B=f(A)$ για $A=\{x\in X: f(x)\in B\}\neq\emptyset$. (Αν $B=\emptyset$, έχουμε $f(\emptyset)=\emptyset$ – γιατί;). Αντίστροφα αν η τελευταία είναι επί τότε η f επί, αφού αν $y\in Y$, $y=f(x)$ για $x\in X$ αφού το $\{y\}\in 2^Y$. Αναλόγως η f 1-1 ανν η τελευταία 1-1. Συνεπώς, η f αμφί ανν η τελευταία αμφί και επομένως αν X, Y ισοπληθικά τότε $|2^X|=|2^Y|$.

β. $f^{-1}: 2^Y \to 2^X$ που ορίζεται ως:

αν $B\in 2^Y$ τότε $f^{-1}(B)=\{x\in X: f(x)\in B\}$

Προσοχή η f^{-1} ορίζεται πάντα! Η f είναι 1-1 ανν $f^{-1}(\{y\})$ είναι μονοσύνολο $\forall y\in Y$. Η f είναι επί ανν $f^{-1}(B)\neq\emptyset, \forall B\neq\emptyset$. Προφανώς αν η f αμφί τότε και η f^{-1} αμφί που αποτελεί την αντίστροφη της συνάρτησης στο α.

γ. Συμπεριφορά των παραπάνω ως προς τις συνολοθεωρητικές πράξεις (τα παρακάτω επεκτείνονται σε αυθαίρετο πλήθος πράξεων.)

1. $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

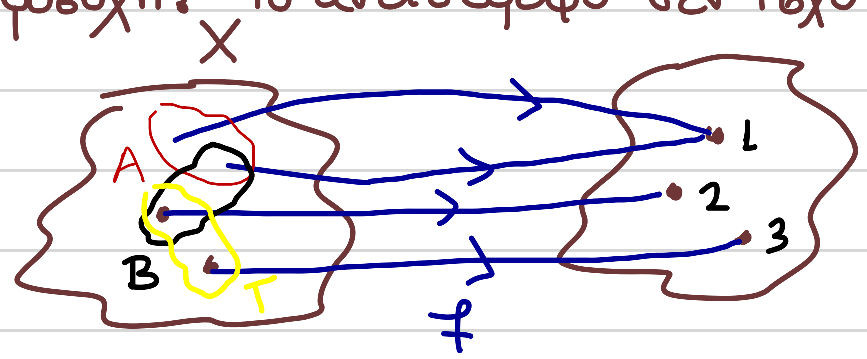
έχουμε ότι $f(A\cup B)=\{y\in Y: \exists x\in A\cup B, y=f(x)\}$

$$=\{y\in Y: \exists x\in A: y=f(x) \text{ ή } \exists x\in B: y=f(x)\}$$
$$=\{y\in Y: \exists x\in A: y=f(x)\}\cup\{y\in Y: \exists x\in B: y=f(x)\}$$

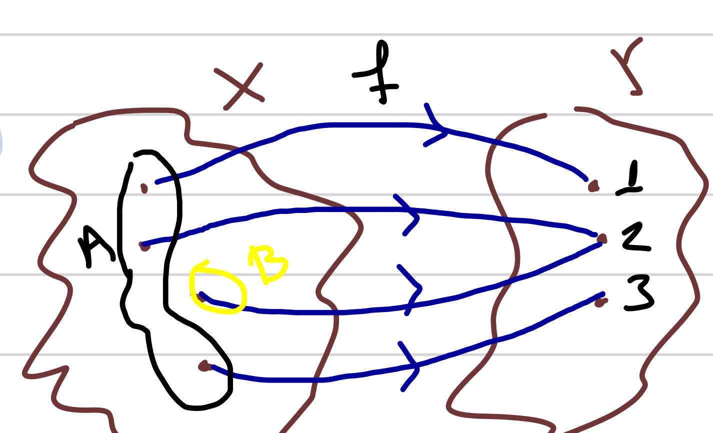
2. $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

Έστω $y\in f(A\cap B)$. Τότε $\exists x\in A\cap B: y=f(x)$, το οποίο όμως σημαίνει ότι $x\in A, y=f(x)$ ΚΑΙ $x\in B, y=f(x)$.

Προσοχή: Το αντίστροφο δεν ισχύει.



αλλά



$f(A)=\{1\}$, $f(B)=\{1,2\}$
$f(A\cap B)=\{1\}$, $f(A)\cap f(B)=\{1\}$ και $f(T)=\{2,3\}$, $f(B\cap T)=\{2\}=f(B)\cap f(T)$

$f(A)=Y$, $f(B)=\{2\}$, $f(A)\cap f(B)=\{2\}$, $f(A\cap B)=\emptyset$

Πόρισμα: Όταν f 1-1 τότε $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$.

Απόδειξη: Αρκεί $f(A)\cap f(B)\subseteq f(A\cap B)$. Αν $y\in f(A)\cap f(B)$ τότε $\exists\, x_1\in A, x_2\in B : y=f(x_1)=f(x_2)$. Αφού η f 1-1 $x_1=x_2 \Rightarrow$ $x_1,x_2\in A\cap B \Rightarrow y=f(x_1)\in f(A\cap B)$

3. $f(X/A)=f(X)/f(A)$

$\xrightarrow{\text{να}}$

1' $f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$

$$\begin{aligned} f^{-1}(A\cup B) &= \{x\in X : f(x)\in A\cup B\} \\ &= \{x\in X : f(x)\in A \text{ ή } f(x)\in B\} \\ &= \{x\in X : f(x)\in A\}\cup\{x\in X : f(x)\in B\}\end{aligned}$$

2' $f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

$$\begin{aligned} f^{-1}(A\cap B) &= \{x\in X : f(x)\in A\cap B\} \\ &= \{x\in X : f(x)\in A \text{ και } f(x)\in B\} \\ &= \{x\in X : f(x)\in A\}\cap\{x\in X : f(x)\in B\}\end{aligned}$$

3' $f^{-1}(B/A)=f^{-1}(B)/f^{-1}(A)$

$$\begin{aligned} f^{-1}(B/A) &= \{x\in X : f(x)\in B/A\} \\ &= \{x\in X : f(x)\in B, f(x)\notin A\} \\ &= \{x\in X : f(x)\in B\}\cap X/\{x\in X : f(x)\in A\} \\ &= f^{-1}(B)\cap (X/f^{-1}(A)) \\ &\overset{\text{επιμ.}}{=} (f^{-1}(B)\cap X)/f^{-1}(A) \\ &= f^{-1}(B)/f^{-1}(A)\end{aligned}$$

V. Αυτοσυναρτήσεις – Σταθερά Σημεία

Όταν $X=Y$ τότε η f ονομάζεται αυτοσυνάρτηση (self map). Αν $x\in X : x=f(x)$, το x ονομάζεται σταθερό σημείο της f.

Π.χ. Αν $f=id_X$ τότε καθε x είναι σταθερό σημείο. Αν $X=[0,1]$ και η f συνεχής τότε η f έχει σταθερό σημείο. Αυτό επειδή η $x-f(x)$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ οπότε έχει μέγιστο και ελάχιστο στο $[-1,1]$. Άρα $\min(x-f(x))\le -\max f(x)\le 0$. Αναλόγως $\max(x-f(x))=1-\min f(x)\ge 0$. Αν $\min=\max=0$ τότε $x=f(x)\ \forall x\in[0,1]$. Αν $\min<0<\max$ τότε εξαιτίας της συνέχειας $x=f(x)$ για κάποιο x. Παρατηρούμε ότι αν $X=(0,1)$ θα υπήρχαν συναρτήσεις χωρίς σταθερό σημείο – π.χ. $f(x) = \alpha x$, $\forall \alpha < 1$.

VI. Δυισμός της συμπλήρωσης

Έχουμε ορίσει για τυχόν $x \in X$ την $ev_x : f \to Y$ ως $ev_x(f) = f(x)$. Το προηγούμενο ορίζει μια νέα συνάρτηση ως εξής:

$ev : X \to Y^{f}$ με $ev(x) = ev_x$

Παρατηρούμε ότι η ev είναι 1-1 και επομένως μέσω αυτής το $\operatorname{im} ev \subseteq Y$ είναι ισομορφικό του X.

Γ. Σχέσεις

Στην τρέχουσα παράγραφο θα ασχοληθούμε συνοπτικά με την συνολοθεωρητική έννοια της σχέσης. Θα δούμε περισσότερες λεπτομέρειες όταν ασχοληθούμε με τους διατεταγμένους χώρους.

Ορισμός: Δυαδική σχέση (Binary Relation) μεταξύ των X και Y ονομάζεται η τριάδα (X, Y, G) όπου $G \subseteq X \times Y$. Το G ονομάζεται γράφημα της σχέσης.

Παρατήρηση: Εφόσον είναι δυνατόν να ορισθούν γινόμενα με αυθαίρετο πλήθος παραγόντων είναι δυνατή η ανάλογη γενίκευση του παραπάνω. Χωρίς μεγάλη απώλεια γενικότητας θα περιορισθούμε στην μελέτη δυαδικών σχέσεων.

Παραδείγματα:

1. $G = X \times Y$
2. $G = \emptyset$
3. $G = X \times \{y\}$, $y \in Y$

Προφανώς εδώ το G είναι ισομορφικό με το X μέσω της $x \to (x, y)$ που είναι αμφί.

Όταν $Y = X$ η σχέση ονομάζεται εσωτερική στο X.

4. $Y = X$, $G = \{(x,x), x \in X\} := \Delta_X$ (διαγώνιος στο X).
5. Κάθε συνάρτηση αποτελεί παράδειγμα σχέσης.

Μια διαδική σχέση θα συμβολίζεται μέσω του γραφήματός της αγνοώντας για απλότητα τα X, Y (όπως κάνουμε συνήθως και με τις συναρτήσεις). Θα λέμε ότι xGy αν $(x,y) \in G$.* Το πρώτο αποτέλεσμα συσχετίζει ξανά διαδικές σχέσεις με συναρτήσεις.

Γεγονός: Μια σχέση G θα είναι συναρτησιακή ανν α. $\forall x \in X, \exists y \in Y : xGy$, και β) αν xGy και $xGz \Rightarrow y = z$. Όταν ισχύει το β και όχι το α τότε έχουμε την έννοια της μερικής συνάρτησης που είδαμε προηγουμένως.

Εξαιτίας της μη μεταθετικότητας του καρτεσιανού γινομένου θα έχουμε δεδομένης της G, μια καινούργια σχέση που θα ορίζεται από την αναστροφή της διάταξης των στοιχείων της G. Έτσι ορίζουμε:

$$yG^{-1}x \text{ αν } xGy$$

Η G^{-1} ονομάζεται αντίστροφη της G.

Όταν $G = \Delta_X \Rightarrow G^{-1} = \Delta_X$. Όταν G συναρτησιακή, η G^{-1} συναρτησιακή ανν η υποκείμενη συνάρτηση είναι αμφί.

Κατ' αναλογία με την συναρτησιακή περίπτωση ορίζεται πράξη σύνθεσης σχέσεων ως εξής:

αν $G \subseteq X \times Y$ και $R \subseteq Y \times Z$ τότε

η $R \circ G \subseteq X \times Z$ ορίζεται από

$$(x,z) \in R \circ G \text{ ανν } \exists y \in Y : (x,y) \in G \text{ και } (y,z) \in R$$

α. Όταν οι G, R συναρτησιακές τότε το παραπάνω είναι σύνθεση συναρτήσεων.

β. Έχουμε $G \circ G^{-1} = \{(x, x^*) \in X \times X : \exists y \in Y, (x,y) \in G, (y, x^*) \in G^{-1}\}$, επομένως αν $G = X \times \{y\}$ για $y \in Y$ τότε $G \circ G^{-1} = X \times X$.

Στα παρακάτω ασχολούμαστε μόνο με εσωτερικές σχέσεις στο X.

Ορισμός. Η $G \subseteq X \times X$ θα αναφέρεται:

i. ανακλαστική (reflexive) ανν $\forall x \in X, (x,x) \in G$ (xGx), δηλ. $\Delta_X \subseteq G$.

ii. συμμετρική (symmetric) ανν όταν $(x,y) \in G$ (xGy) τότε $(y,x) \in G$ (yGx)

* Ο συμβολισμός xGy είναι ενδεικτικός της ερμηνείας: « αν $(x,y) \in G$ τότε το x σχετίζεται με το y βάσει του G». Μπορείτε να βρείτε συνάφεια του παραπάνω με την $1_G \in 2^{X \times Y}$;

iii. αντισυμμετρική όταν αν $(x,y)\in G$ (xGy) και $(y,x)\in G$ (yGx) τότε $y=x$.

iv. μεταβατική (transitive) όταν αν $(x,y)\in G$ (xGy) και $(y,z)\in G$ (yGz) τότε και $(x,z)\in G$ (xGz).

Παρατηρήσεις:

1. Η G συμμετρική $\Leftrightarrow G=G^{-1}$

$(\Rightarrow)$ αν $(x,y)\in G^{-1} \overset{\text{ορ.}}{\Rightarrow} (y,x)\in G \overset{\text{συμ.}}{\Rightarrow} (x,y)\in G \Rightarrow G^{-1}\subseteq G$.

αν $(x,y)\in G \overset{\text{συμ.}}{\Rightarrow} (y,x)\in G \overset{\text{ορ.}}{\Rightarrow} (x,y)\in G^{-1} \Rightarrow G\subseteq G^{-1}$.

$(\Leftarrow)$ Προφανές.

2. Η G ανακλαστική $\Leftrightarrow G^{-1}$ ανακλαστική

αν $(x,x)\in G \overset{\text{ορ.}}{\Rightarrow} (x,x)\in G^{-1}$.

3. Η G αντισυμμετρική $\Leftrightarrow G^{-1}$ αντισυμμετρική.

$(\Rightarrow)$ Έστω ότι $xG^{-1}y$ κ' $yG^{-1}x \Rightarrow yGx$ κ' $xGy \overset{\text{αντ.}}{\Rightarrow} x=y$

$(\Leftarrow)$ Παρόμοια.

4. Η G μεταβατική $\Leftrightarrow G^{-1}$ μεταβατική

$(\Rightarrow)$ Έστω $xG^{-1}y$ κ' $yG^{-1}z \overset{\text{ορ}}{\Rightarrow} zGy$ κ' $yGx \overset{\text{μετ.}}{\Rightarrow} zGx \Rightarrow xG^{-1}z$

$(\Leftarrow)$ Παρόμοια.

5. Η G μεταβατική $\Leftrightarrow G\circ G\subseteq G$

$(\Rightarrow)$ Έστω $x\, G\circ G\, y \Leftrightarrow \exists z: xGz$ κ' zGy

$\overset{\text{μετ.}}{\Rightarrow} xGy$.

$(\Leftarrow)$ Προφανές από το παραπάνω.

Δ. Σχέσεις Ισοδυναμίας

Χρησιμοποιούμε τα προηγούμενα προκειμένου να μελετήσουμε δύο είδη σχέσεων, τις σχέσεις ισοδυναμίας και τις διατάξεις. Ξεκινάμε από τις πρώτες. Αυτές εκφράζουν συνολοθεωρητικά την ταύτιση δύο αντικειμένων που δεν μπορούμε να ξεχωρίσουμε ως προς κάποια ιδιότητα.

Ορισμός. Η $G\subseteq X\times X$ θα ονομάζεται σχέση ισοδυναμίας (equivalence relation) όταν είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική. (Θα συμβολίζεται με $\sim$)

Σημείωση: Όταν $x\sim y$ τότε αυτά θεωρούνται ισοδύναμα ως προς την $\sim$ οπότε και ταυτίζονται.

Παραδείγματα:

1. Η Δ_X είναι σχέση ισοδυναμίας (γιατί;) Συνεπώς το $x\sim x$ οπότε και η συγκεκριμένη σχέση αναπαριστά την ταύτιση του x με τον εαυτό του.

2. Έστω ότι $X=\mathbb{Z}$. Ορίζουμε την σχέση $x\sim y$ αν τα x και y έχουν το ίδιο υπόλοι-

πο όταν διαιρεθούν με το 2 ($\sim$ είναι $n = \mathrm{Mod}\,2$). Έτσι $\ldots \sim -5 \sim -3 \sim -1 \sim 1 \sim 3 \sim 5 \ldots$ και $\ldots -4 \sim -2 \sim 0 \sim 2 \sim 4 \sim \ldots$. Επομένως $\sim = \{(x,y) : x = 2k_x$ και $y = 2k_y$ ή $x = 2k_x + 1$ και $y = 2k_y + 1,\ x, y, k_x, k_y \in \mathbb{Z}\}$. Προφανώς η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

3. Έστω $f : X \to Y$. Ορίζουμε ότι αν $x_1, x_2 \in X$ τότε $x_1 \underset{f}{\sim} x_2$ ανν $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε δηλαδή ότι $\underset{f}{\sim} = \{(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in X$ και $f(x_1) = f(x_2)\} \subseteq X \times X$. Προφανώς, $x \underset{f}{\sim} x$ αφού $f(x) = f(x)$, αν $x_1 \underset{f}{\sim} x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow f(x_2) = f(x_1) \Leftrightarrow x_2 \underset{f}{\sim} x_1$ και αν $x_1 \underset{f}{\sim} x_2$ & $x_2 \underset{f}{\sim} x_3 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ και $f(x_2) = f(x_3) \Rightarrow f(x_1) = f(x_3) \Rightarrow x_1 \underset{f}{\sim} x_3$. Συνεπώς η $\underset{f}{\sim}$ είναι σχέση ισοδυναμίας. (Τα x_1, x_2 θεωρούνται ισοδύναμα αν απεικονίζονται από την f στο ίδιο y).

Τάξεις ισοδυναμίας – Πηλίκα – Διαμερίσεις

Έστω $\sim$ σχέση ισοδυναμίας επί του X. Αν $x \in X$ ορίζουμε την τάξη ισοδυναμίας του x ως το $[x] \in 2^X$ με $[x] = \{y \in X : x \sim y\}$ (equivalence class of x).

Έχουμε τα εξής:

- $x \in [x]$ αφού $x \sim x$
- αν $x \sim y \Leftrightarrow [x] = [y]$

Προφανώς αν $x \sim y$ και $z \in [x]$ τότε $z \sim x$ και συνεπώς (μεταβατικά) $z \sim y \Rightarrow z \in [y]$. Το ίδιο επιχείρημα λειτουργεί και αντίστροφα και άρα $[x] = [y]$. Το αντίστροφο είναι προφανές.

- αν $(x,y) \notin \sim$ ($\Leftrightarrow (x,y) \in \sim^c$) τότε $[x] \cap [y] = \emptyset$. (*)

Έστω ότι $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Έστω ότι $z \in [x] \cap [y] \Leftrightarrow z \sim x$ κ' $z \sim y \Rightarrow x \sim y$ άτοπο.

- $\bigcup_{x \in X} [x] = X$ (**)

Προφανές από την πρώτη ιδιότητα.

Ορίζουμε το πηλίκο (quotient) του X ως προς την $\sim$ το εξής υποσύνολο του 2^X:

$$X/_{\sim} := \{[x],\ x \in X\}$$

Παρένθεση: Διαμέριση Δ του X θα ονομάζεται όποιο υποσύνολο του 2^X έχει τις εξής ιδιότητες:

α. $A, B \in \Delta,\ A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

β. $\bigcup \Delta = X$

Εξαιτίας των (*), (**) το $X/_{\sim}$ αποτελεί διαμέριση του X.

Αντίστροφα, αν Δ διαμέριση του X τότε ορίζει μία σχέση ισοδυναμίας $\sim_\Delta$ ώστε $X/_{\sim_\Delta} = \Delta$.

Ορίζουμε $x \underset{\Delta}{\sim} y$, ανν $x,y \in A \in \Delta$. Προφανώς η $\underset{\Delta}{\sim}$ είναι ανακλαστική(β) και συμμετρική. Αν $x \underset{\Delta}{\sim} y$ $(x,y \in A)$ και $y \underset{\Delta}{\sim} z$ $(y,z \in B)$ τότε $A=B$ εξαιτίας της ιδιότητας (α) της Δ, συνεπώς $x \underset{\Delta}{\sim} z$. Οι τάξεις ισοδυναμίας είναι προφανώς τα στοιχεία του Δ. (Ισοδυναμία των σχέσεων ισοδυναμίας και των διαμερίσεων).

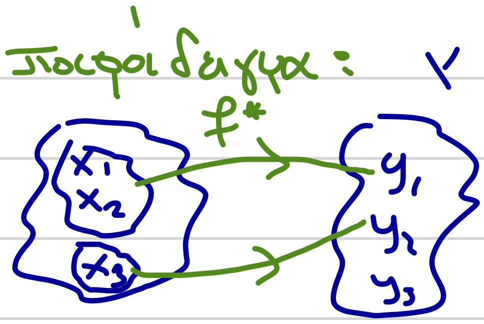
Παραδείγματα

1. Έχουμε ότι $[x]=\{x\}$ και $X/_{\Delta_X} = \{\{x\}, x \in X\}$ δηλαδή η συλλογή από όλα τα μονοσύνολα μέλη του 2^X.
2. Έχουμε ότι $[x] = \{\dots,-4,-2,0,2,4,\dots\}$ αν ο x είναι άρτιος ή $\{\dots,-3,-1,1,3,\dots\}$ αν ο x είναι περιττός. Επομένως
$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/_{\sim} = \{[0],[1]\} \simeq 2$$
3. Έστω ότι

Οπότε $[x_1]=[x_2]=\{x_1,x_2\}$, $[x_3]=\{x_3\}$ και $X/_{\sim_f} = \{\{x_1,x_2\},\{x_3\}\}$.

Επιστρέφοντας στην γενική περίπτωση μπορούμε να ορίσουμε την
$$f^*: X/_{\sim_f} \to Y \quad \text{ως}$$
$$f^*([x]) = f(x)$$
Παρατηρούμε ότι η f^* είναι καλώς ορισμένη αφού αν $x,y \in [x]$ $f(x)=f(y)$ και ότι η f^* είναι 1-1 αφού αν $f^*([x]) = f^*([y]) \Rightarrow f(x)=f(y) \Rightarrow [x]=[y]$.

Στο προηγούμενο παράδειγμα:



Έτσι απαντάται το ερώτημα της μετατροπής αυθαίρετης f σε 1-1.

E. Αξίωμα της Επιλογής

Παρατηρήσαμε ότι δεδομένου συνόλου $\{A_i, i\in I\}$ το καρτεσιανό γινόμενο $\times_{i\in I} A_i := A_1\times A_2\times\dots$ δεν μπορεί να οριστεί στην ZF όταν το I έχει άπειρο πλήθος στοιχείων. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε κανόνα ο οποίος σε πεπερασμένο πλήθος βημάτων να κατασκευάζει το αντικείμενο που χρειαζόμαστε. Ένας τρόπος άρσης του αδιεξόδου είναι να προσθέσουμε στην ZF αξίωμα το οποίο να εγγυάται την ύπαρξη παρόμοιων αντικειμένων.

Ορισμός. Συνάρτηση επιλογής θα καλείται όποια $f: I\to \bigcup_{i\in I} A_i$ με την ιδιότητα
$f(i)\in A_i\ \forall i\in I$.

Παράδειγμα. $I=2$, και $A_1=A_2=\mathbb{R}$, οπότε $A_1\cup A_2=\mathbb{R}$ και οποιαδήποτε διατεταγμένη δυάδα πραγματικών αριθμών (δηλ. στοιχείο του $\mathbb{R}^2$ αποτελεί συνάρτηση επιλογής. Εδώ η ύπαρξη τέτοιων συναρτήσεων είναι βέβαιη επειδή $|I|$ πεπερασμένο. (Σκεφθείτε την περίπτωση όπου $I=\mathbb{N}$, $A_i=\mathbb{R}\ \forall i$. Υπάρχουν συναρτήσεις επιλογής χωρίς την χρήση του παρακάτω).

Συμβολίζουμε με $CF(I,\cup A_i)$ το σύνολο των ανάλογων συναρτήσεων επιλογής. Διατυπώνουμε το αξίωμα.

Αξίωμα της Επιλογής (Axiom of Choice – AC)

$$CF(I,\cup A_i)\neq\emptyset$$

Αποδεικνύεται ότι το AC είναι ανεξάρτητο του ZF. Δηλαδή αν το ZF δεν περιέχει αντιφάσεις τότε $ZF\not\Rightarrow AC$ (και $ZF\not\Rightarrow$ μη AC). Υπάρχουν πολλές ισοδύναμες εκφράσεις για το AC (π.χ. το λήμμα του Zorn που θα δούμε παρακάτω) όπως και αποτελέσματα που έχουν το AC ως αναγκαία συνθήκη (π.χ. Θεώρημα Tychonov, Παράδοξο Banach–Tarski κ.ο.κ.)

(AC′) Για κάθε σχέση G υπάρχει συνάρτηση έτσι ώστε αν $Grf\subseteq G$ (κάθε σχέση ορίζει συνάρτηση)

Θεώρημα: $AC\Leftrightarrow AC'$

Απόδειξη: ($\Rightarrow$) Έστω σχέση $G\subseteq X\times Y$. Θέτουμε $I=\{x\in X: (x,y)\in G \text{ για } y\in Y\}$ και $A_x=\{y\in Y: (x,y)\in G\}$. Από το AC έχουμε ότι υπάρχει $f: X\to\bigcup_x A_x$ ώστε $f(x)\in A_x\ \forall x\in I$. $Grf=\{(x,f(x)), x\in I\}\subseteq G$.

($\Leftarrow$) Έστω I και $A_i\ \forall i\in I$. Έστω $G=\{\{i\}\times A_i, i\in I\}=\bigcup_i\{\{i\}\times A_i\}\subseteq I\times\{A_i, i\in I\}$. Από την AC′, $\exists f: I\to\cup A_i$ με $f(i)\in A_i\ \forall i$.

Εφαρμογή. Ύπαρξη του $\times_{i\in I} A_i$.

Ορίζουμε το $\times_{i\in I} = Cf(I, \cup A_i) \neq \emptyset$ από το AC.

να Ελέγξτε ότι αν $|I|$ πεπερασμένο τότε ο παραπάνω ορισμός συνάδει με τα όσα έχουν ορισθεί προηγουμένως.

Στ. Πληθικότητα (Cardinality)

Στα προηγούμενα αναφορικά με το πλήθος των μελών συνόλου υπαινιχθήκαμε τα εξής:

1. Την ύπαρξη "συνάρτησης" που σε κάθε σύνολο αποδίδει το εν λόγω πλήθος. Προφανώς αυτή θα έπρεπε να ορίζεται στην συλλογή όλων των συνόλων (που δεν αποτελεί σύνολο όπως είδαμε στο A) και παίρνει τιμές σε ένα σύνολο αριθμών που ονομάζονται πληθικοί (cardinal numbers). Έχουμε ότι το $\mathbb{N}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του παραπάνω. Επειδή δεν γνωρίζουμε τι σημαίνει συνάρτηση με πεδίο ορισμού κάτι το οποίο δεν είναι σύνολο. Επομένως δεν μπορούμε να διερευνήσουμε εξαντλητικά το παραπάνω. Επίσης θα περιγράψουμε απλώς κάποιες βασικές ιδιότητες του συνόλου των πληθικών.
2. Χαρακτηρίσαμε την παραπάνω "σχέση ισοδυναμίας" στη συλλογή όλων των συνόλων. Αν A, B σύνολα, $A \simeq_c B$ ανν $|A|=|B|$. Και πάλι ισχύουν τα παραπάνω αναφορικά με τον αυστηρό ορισμό αυτής της σχέσης. Άρα είδαμε ότι η συνολοθεωρία ασχολείται με τις "τάξεις" ισοδυναμίας που προκύπτουν.
3. Ορίζουμε ότι $A \lesssim_c B$ ανν $|A| \leq |B|$. (Για να κατανοήσουμε πλήρως κάτι τέτοιο μας χρειάζεται ενδελεχέστερη μελέτη των πληθικών.) Υπαινιχθήκαμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη $f: A \to B$, 1-1. Αναλόγως, η "αντίστροφη" σχέση (μπορείτε να το συνδέσετε με τον ορισμό του G^{-1} αν G σχέση;) $A \gtrsim_c B$ ανν υπάρχει $f: A \to B$ επί. (Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί αυτό είναι ισοδύναμο με την ύπαρξη - βάσει του παραπάνω - $g: B \to A$, 1-1;)*

Τα παραπάνω είναι αφορμή για την διατύπωση του Θεωρήματος Shröeder-Bernstein. Θα το αποδείξουμε αργότερα χρησιμοποιώντας το Θεώρημα σταθερού σημείου των Knaster-Tarski.

Θ.S-B. Αν $A \gtrsim_c B$ και $B \gtrsim_c A$ τότε $A \simeq_c B$.

*Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το AC.

(Προφανώς αυτό είναι ισοδύναμο με το: "αν $\exists f: A \to B$ 1-1, και $g: B \to A$ 1-1 τότε $\exists j: A \to B$ αμφι.)

4. Αν $A \subseteq B$ τότε $A \preceq_c B$. Η συνάρτηση συμπερίληψης είναι 1-1. Οπότε $|A| \leq |B|$. $|A \cap B| \leq |A|$ ή $|B|$. $A \cap B \subseteq A$ ή B. $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ (Προσπαθήστε να το αποδείξετε χρησιμοποιώντας την έννοια της ξένης ένωσης – disjoint union). $|Y^X| = |Y|^{|X|}$. Οπότε $|2^X| = 2^{|X|}$ (να.).

5. Αν $|A| \in \mathbb{N}$ τότε το A ονομάζεται πεπερασμένο (finite). Αν το A δεν είναι πεπερασμένο τότε είναι άπειρο.

6.

μεγάλος από κάτω, δηλαδή $\nexists n \in \mathbb{N}: n+1 = \aleph_0$. Κάθε σύνολο στην τάξη ισοδυναμίας του $\mathbb{N}$ (ως προς την $\simeq_c$) ονομάζεται αριθμήσιμα άπειρο (countably infinite). Π.χ. το $\mathbb{N} \simeq_c \mathbb{Z}$ (ελέγξτε ότι η $0 \to 0$, $1 \to -1$, $2 \to 1$, $3 \to -2$, $4 \to 2$ κ.ο.κ. είναι αμφι.) $\mathbb{N} \simeq_c$ άρτιοι (αναλόγως $0 \to 0$, $1 \to 2$, $2 \to 4$ κ.ο.κ.), $\mathbb{N} \simeq_c$ περιττοί, $\mathbb{N} \simeq_c \mathbb{Q}$ (βρείτε ανάλογες αντιστοιχίες). Παρατηρήστε είναι δυνατόν γνήσιο υποσύνολο απειροσυνόλου να έχει τον ίδιο πληθάριθμο με το αρχικό. Κάτι το οποίο προφανώς δεν ισχύει για τα πεπερασμένα σύνολα. Τέλος, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \simeq_c \mathbb{N}$ (να.)

7. Αν $A \preceq_c \mathbb{N}$ τότε ονομάζεται αριθμήσιμο (countable). Προφανώς οποιοδήποτε υποσύνολο αριθμήσιμου είναι αριθμήσιμο. Συνεπώς η τομή αριθμήσιμων είναι αριθμήσιμο! $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ είναι αριθμήσιμο αν I και A_i είναι $\forall i \in I$ αριθμήσιμα. Αρκεί να βρούμε $f: A \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, 1-1 (γιατί;) Συμβολίζουμε με x_{ij}, $j \in \mathbb{N}$ το στοιχείο j του A_i και αυτό είναι εφικτό επειδή το A_i αριθμήσιμο. Ορίζουμε $f(x_{ij}) = (i,j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ επειδή το I είναι αριθμήσιμο. Η f είναι 1-1 αφού αν $(i,j) = f(x_{ij}) = f(x_{i^*j^*})$ τότε πρέπει $i = i^*$ και $j = j^*$ επομένως $x_{ij} = x_{i^*j^*}$, εξαιτίας της αριθμησιμότητας.

8. $|\mathbb{R}| = c$ (ή $\aleph_1$ – aleph one), $c > \aleph_0$ και $\mathbb{R} \simeq_c 2^{\mathbb{N}}$. Κάθε σύνολο με πληθάριθμο μεγαλύτερο του $\aleph_0$ ονομάζεται υπεραριθμήσιμο (uncountable). Προφανώς αν $A \supseteq B$ και $|B| > \aleph_0$ τότε και το A υπεραριθμήσιμο. Το γινόμενο υπεραριθμήσιμων είναι υπεραριθμήσιμο (οι προβολές είναι επί). Το $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ (άρρητοι) όπως και όποιο διάστημα του $\mathbb{R}$ είναι υπεραριθμήσιμο (γιατί;).

9. (Υπόθεση του συνεχούς – continuum hypothesis) Δεν υπάρχει πληθάριθμος μεταξύ των $\aleph_0$ και c (δεν έχει αποδειχθεί – Προσπαθήστε το!)

10. $|A| = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$. Προφανές από την μοναδικότητα του $\emptyset$.